Esercizi sulle equazioni lineari del prim'ordine a coefficienti continui

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi B

Esercizio 1

$$\begin{cases} y' + 2y = e^x \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-A(x)} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)} b(s)\, ds \right]$$

$\cdot\ a(x) = 2$ $\qquad x_0 = 1,\ y_0 = 3$

$$\Rightarrow A(x) = \int_1^x 2\, ds = 2(x-1)$$

$$\cdot \int_{x_0}^{x} e^{A(s)} b(s)\, ds$$

$$= \int_{1}^{x} e^{2(s-1)} e^{s}\, ds$$

$$= \int_{1}^{x} e^{3s-2}\, ds = e^{-2}\left[\frac{e^{3s}}{3}\right]_{1}^{x}$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^{3x-2} - e\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-A(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)} b(s)\,ds\right]$$

$\Downarrow$ e quindi

$$y(x) = e^{-2(x-1)}\left[3 + \frac{1}{3}\left(e^{3x-2} - e\right)\right]$$

$$= \underbrace{3e^{2-2x} + \frac{1}{3}e^{x} - \frac{1}{3}e^{3-2x}}$$

(Es: verificare che questa è la soluzione)

Es. 2

$$\begin{cases} y'(x) = 10y(x) + e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

N.B. Sappiamo risolvere l'equazione

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x)$$

$\Rightarrow$ $y'(x) - 10y(x) = e^x$. Applico la formula risolutiva con $\begin{cases} a(x) = -10 \\ b(x) = e^x \end{cases}$

$$\boxed{y(x) = \frac{e^{10x} - e^x}{9}}$$

Es. 3

$$\begin{cases} u'(x) + \frac{1}{x}u(x) = 2\arctan(x) \\ u(1) = 3 \end{cases}, \quad \text{per } x > 0$$

Siccome la condiz. di Cauchy è data in 1, cerco soluz. definite in un intervallo contenente 1. Posso supporre che x, nel dominio di u, sia $\boxed{x>0}$

$\Longrightarrow$

$$\rightarrow y(x) = e^{-A(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)} b(s)\, ds \right]$$

Lo applico con $x_0 = 1$, $y_0 = 3$

$a(x) = \frac{1}{x}$, $b(x) = 2\arctan(x)$

$$\bullet\ A(x) = \int_1^x \frac{1}{s}\, ds = \log(|x|) = \log(x)$$

perché $\underline{\underline{x > 0}}$

$$\cdot \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}\, b(s)\,ds$$

$$= \int_{1}^{x} e^{\log(s)}\, 2\arctan(s)\,ds$$

$$= \int_{1}^{x} \overbrace{2s}^{f'}\, \overbrace{\arctan(s)}^{g}\,ds =$$

$$-\int_{1}^{x} s^2 \cdot \frac{1}{1+s^2}\,ds + \Big[s^2 \arctan(s) \Big]_{1}^{x}$$

$$= -\int_1^x 1\,\cancel{\frac{s^2+1}{s^2+1}}\,ds + \int_1^x \frac{1}{s^2+1}\,ds$$

$$+ x^2\arctan(x) - \arctan(1)$$

$$= -x + 1 + \arctan(x) - \arctan(1)$$

$$+ x^2\arctan(x) - \arctan(1)$$

$$= -x + 1 + \arctan(x) + x^2\arctan(x).$$

$$-\pi/2$$

$$y(x) = e^{-\log(x)} \cdot$$

$u(x)$

$$\left[3 - x + 1 + \arctan(x) + x^2 \arctan(x) - \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{x} \left(4 - x + \arctan(x) + x^2 \arctan(x) - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\mathrm{dom}\, y(x) = (0, +\infty)$$

Es. 4

Data u tale che

$$\begin{cases} u' + \frac{1}{x} u = \sin(x) \\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

, per $x > 0$

COME PRIMA posso supporre che $x > 0$

determinare

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{u(x)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

$\bullet \quad a(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = \pi/2$

$$\Rightarrow A(x) = \int_{\pi/2}^{x} \frac{1}{s} \, ds = \log(x) - \log(\pi/2)$$

$$= \log\left(\frac{2}{\pi} x\right)$$

$$\cdot \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}\, b(s)\, ds$$

$$= \int_{\pi/2}^{x} e^{\log\left(\frac{2}{\pi} s\right)} \cdot \sin(s)\, ds$$

$$= \int_{\pi/2}^{x} \frac{2}{\pi}\, \overset{g}{s} \cdot \overset{f'}{\sin(s)}\, ds \overset{\text{per PARTI}}{=}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \cancel{-}\int_{\pi/2}^{x} 1\cdot\left(\cancel{-}\cos(s)\right)ds + \Big[s(-\cos(s)) \Big]_{\pi/2}^{x} \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\sin(x) - 1 - x\cos(x) \Big]$$

$\Rightarrow$ La formula risolutiva

$$u(x) = \underbrace{e^{-\log\left(\frac{2}{\pi}x\right)}}_{= \frac{\pi}{2x}} \left[0 + \frac{2}{\pi}\sin(x) - \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}x\cos(x) \right]$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{\sin(x)}{x} - \frac{1}{x} - \cos(x)$$

con $\mathrm{dom}(u) = (0, +\infty)$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{u(x)}{x}\, dx$$

Ricordo che

$$u' + \frac{1}{x} u = \sin(x)$$

$$\Rightarrow \frac{u(x)}{x} = \sin(x) - u'(x)$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{u(x)}{x}\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\sin(x) - u'(x)\right) dx$$

$$= \Big[-\cos(x) - u(x)\Big]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= -\cos(\pi) + \underbrace{\cos(\pi/2)}_{} = 0$$

$$- u(\pi) + \underbrace{u(\pi/2)}_{} = 0$$

COND. CAUCHY

$$= -\cos(\pi) - u(\pi) = \dots\dots \; 1/\pi$$

Es. 5

$$\begin{cases} x^3 u'(x) + x^2 u(x) = 6 & \forall\, x > 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

→ non potete separare le variabili _

→ Cerco di riportarla alla forma canonica di un'equaz. lineare a coeff. continui ⟹

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = b(x)$$

Quindi divido per x^3 (posso farlo perché $x>0$!)

$$\Rightarrow \begin{cases} u'(x) + \frac{1}{x} u(x) = \frac{6}{x^3}, & x>0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Ora applicate la formula risolutiva con $a(x) = \frac{1}{x}$, $b(x) = 6/x^3$, $x_0 = 1$ $\Longrightarrow$

$y_0 = 0$

Verificherete che

$$u(x) = \frac{6}{x} - \frac{6}{x^2}$$

(ESERCIZIO!)

Es. 6

$$\begin{cases} y' = \sin(x) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Es. 7

Data u tale che

$$\begin{cases} u'(t) + \ 2u(t) = \frac{t^2}{t^2+1} \\ u(0) = 3 \end{cases}$$

calcolare

$$\lim_{t \to +\infty} u(t).$$

Es. 8

$$u(x) = e^{-A(x)}\left[u(0) + \int_0^x e^{A(s)} b(s)\, ds\right]$$

con

$$A(x) = \int_0^x a(s)\, ds$$

Determinare il sup degli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la soluzione u di

$$\begin{cases} u' + u = e^{\alpha x} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

soddisfi

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} u(x) = 0.$$

$$a(x) \equiv 1 \Rightarrow A(x) = \int_0^x 1\, ds = x$$

$$\int_0^x e^{s} e^{\alpha s}\, ds = \int_0^x e^{(\alpha+1)s}\, ds \quad \begin{cases} \alpha+1 \neq 0 \\ \alpha+1 = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$

- $\alpha+1 \neq 0$, cioè $\alpha \neq -1$

$$\int_0^x e^{(\alpha+1)s}\,ds = \left[\frac{e^{(\alpha+1)s}}{\alpha+1}\right]_0^x$$

$$= \frac{e^{(\alpha+1)x} - 1}{\alpha+1}$$

- $\alpha+1=0$, cioè $\alpha=-1$

$$\int_0^x e^0\,ds = \int_0^x 1\,ds = x$$

Caso $\alpha = -1$

$$u_\alpha(x) = u_{-1}(x) = e^{-x}\left[1 + x\right]$$

Caso $\alpha \neq -1$

$$u_\alpha(x) = e^{-x}\left[1 + \frac{e^{(\alpha+1)x}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\right]$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+1}\, e^{-x} + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} u(x) = 0 \quad ?$$

- per $\alpha = -1$ la condizione VALE

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\left(e^{-x}(1+x)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{-2x}(1+x) = 0$$

- per $\alpha \neq -1$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} e^{-x} + \frac{1}{\alpha+1} e^{\alpha x}\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha}{\alpha+1} e^{-2x}}_{L_1} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(\alpha-1)x}}{\alpha+1}}_{L_2}$$

$L_1 = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$L_2 = 0 \iff \alpha < 1$

Conclusione

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} u_\alpha(x) = 0 \qquad (\heartsuit)$$

se $\alpha = -1$

$\forall \alpha \neq -1$ e tale che $\alpha < 1$

L'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che vale $(\heartsuit)$ è $(-\infty, 1)$. Il suo sup è $\boxed{1}$.